КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В. А. Попов

Сборник задач по интегральным уравнениям

Казань 2006

УДК 517.968

В. А. Попов. Сборник задач по интегральным уравнениям.
Казань, 2006. 30 с.

Табл. 1. Библиогр.: 6 назв.

Сборник задач содержит материалы для практических занятий по курсам: „Интегральные уравнения“ и „Операционное исчисление“. Предназначен для студентов физического факультета, обучающихся по специальностям „Физика“, „Радиофизика“, „Астрономия“ и „Астрономо-геодезия“.

Печатается по решению Редакционно-издательского совет физического факультета Казанского государственного университета.

Рецензент: доцент кафедры высшей математики КГТУ им. А. Н. Туполева, к.ф.-м.н М. Х. Бренерман.

Предисловие

Сборник содержит задачи по курсу „Интегральные уравнения“ и разделу „Операционное исчисление“ курса „Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление“, читаемых на физическом факультете Казанского государственного университета. Сборник содержит более 100 задач, часть из которых взята из задачника под редакцией А. В. Ефимова [6]; большинство задач составлены заново.

В начале каждого параграфа изложены методы, необходимые для решения задач этого параграфа и приведены примеры решения типовых задач.

Основные понятия и определения

Интегральным называется уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла. Интегральные уравнения вида

$$\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \tag{1}$$

и

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\,y(t)\,\mathrm{d}t + f(x) \tag{2}$$

называются линейными *интегральными уравнениями Фредгольма* 1-го и 2-го рода, соответственно. Здесь $y(x)$ — искомая функция, $K(x,t)$ и $f(x)$ — известные функции, заданные на отрезке $[a,b]$. Функция $K(x,t)$ называется *ядром* интегрального уравнения, а $f(x)$ — свободным членом этого уравнения. Если $f(x)=0$, уравнение называется однородным.

Интегральные уравнения вида

$$\int_a^x K(x,t)\,y(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \tag{3}$$

и

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\,y(t)\,\mathrm{d}t + f(x) \tag{4}$$

называются линейными *интегральными уравнениями Вольтерра* 1-го и 2-го рода, соответственно. Ядро интегрального уравнения Вольтерра определяется в треугольнике $a \le x \le b$, $a \le t \le x$.

Ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения (2) называется *вырожденным*, если оно может быть представлено в виде

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x) q_k(t). \tag{5}$$

Ненулевые значения параметра λ, при которых однородное уравнение Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

имеет нетривиальные решения, называются *характеристическими числами* этого уравнения (или ядра $K(x,t)$), а сами решения — *собственными функциями*, соответствующими характеристическому числу λ. Числа $\mu = 1/\lambda$ называются *собственными числами* интегрального уравнения.

Интегральные уравнения Вольтерра (4) формально могут рассматриваться как частный случай уравнений Фредгольма (2) с ядром:

$$K_1(x,t) = \begin{cases} K(x,t), & a \le t \le x, \\ 0, & x < t \le b. \end{cases}$$

Несмотря на это, методы решения уравнений Фредгольма отличаются от методов решения уравнений Вольтерра из-за тех требований, которые при этом накладываются на ядро интегрального уравнения (например, условие непрерывности).

Интегральные уравнения Фредгольма

Метод последовательных приближений

Если в уравнении Фредгольма (2) числовой параметр λ удовлетворяет условию

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad \text{где} \quad B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{7}$$

то уравнение (2) имеет единственное решение. В этом случае оно может быть найдено методом последовательных приближений. Выбрав произвольным образом нулевое приближение $y_0(x)$, можно построить последовательность функций $y_n(x)$:

$$y_1(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, y_0(t)\,\mathrm{d}t + f(x),$$

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\, y_1(t)\, \mathrm{d}t + f(x), \qquad (8)\\
\ldots & \ldots \ldots \quad \ldots\\
y_n(x) &= \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\, y_{n-1}(t)\, \mathrm{d}t + f(x),\\
\ldots & \ldots \ldots \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Эта последовательность сходится к точному решению $y(x)$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$.

Пример 1. Решить методом последовательных приближений интегральное уравнение

$$
y(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 y(t)\, \mathrm{d}t.
$$

Решение. В этом уравнении $\lambda = 1/2$, а $K(x,t) = 1$. Поэтому

$$
B^2 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |K(x,t)|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |K(x,t)|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = 1,
$$

и условие $|\lambda| < 1/B$ выполнено. В качестве нулевого приближения возьмем $y_0 = \sin \pi x$ и построим следующие приближения:

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \sin \pi x + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 y_0(t)\, \mathrm{d}t = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \sin \pi t\, \mathrm{d}t = \sin \pi x + \frac{1}{\pi},\\
y_2(x) &= \sin \pi x + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 y_1(t)\, \mathrm{d}t = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(\sin \pi t + \frac{1}{\pi} \right) \mathrm{d}t = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi},\\
y_3(x) &= \sin \pi x + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 y_2(t)\, \mathrm{d}t = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(\sin \pi t + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \right) \mathrm{d}t =\\
&= \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi}.
\end{aligned}
$$

Вычислив несколько первых членов последовательности $\{y_n(x)\}$, замечаем, что n-ое приближение может быть записано в следующем виде:

$$
y_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2\pi} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}\pi} = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}.
$$

Точное решение находим как предел

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \sin\pi x + \frac{2}{\pi}.$$

Решить интегральные уравнения методом последовательных приближений.

1. $y(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 e^{x-t} y(t)\,\mathrm{d}t + e^x.$

2. $y(x) = \displaystyle\int_0^1 x\, e^{x-t} y(t)\,\mathrm{d}t + e^x.$

3. $y(x) = \displaystyle\int_0^1 xt\, y(t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{1-x^2}.$

4. $y(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin t\, y(t)\,\mathrm{d}t + \sin x.$

5. $y(x) = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln t}{x} y(t)\,\mathrm{d}t + \ln x.$

6. $y(x) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{xt}\, y(t)\,\mathrm{d}t + x.$

7. $y(x) = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{\frac{x}{t^3}}\, y(t)\,\mathrm{d}t + x^{3/2}.$

8. $y(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin x\, y(t)\,\mathrm{d}t + \cos x.$

Метод итерированных ядер

Если в методе последовательных приближений выбирать $y_0(x) = f(x)$, то для n-ого приближения можно получить формулу

$$\begin{aligned} y_n(x) &= f(x) + \sum_{m=0}^{n}\lambda^{m+1}\int_a^b K_m(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= f(x) + \lambda\int_a^b \sum_{m=0}^{n}\lambda^m K_m(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

в которой итерирированные ядра $K_m(x,t)$ определяются с помощью соотношений

$$K_0 \equiv K(x,t), \qquad K_m(x,t) = \int_a^b K(x,s) K_{m-1}(s,t)\,\mathrm{d}s.$$

При $n \to \infty$ под знаком интеграла получаем ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_m(x,t). \tag{9}$$

Для некоторых значений λ этот ряд сходится к функции $R(x,t,\lambda)$, которая называется *резольвентой* ядра $K(x,t)$. В этом случае решение интегрального уравнения может быть найдено по формуле

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\, f(t)\, \mathrm{d}t. \tag{10}$$

При этом область сходимости ряда (9) может оказаться шире, чем это определяется условием (7).

Вообще говоря, понятие резольвенты, как функции, с помощью которой решение интегрального уравнения (2) может быть найдено с помощью формулы (10), имеет смысл для любых значений λ, при которых уравнение имеет единственное решение.

Пример 2. Решить методом итерированных ядер интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^1 \frac{x}{1+t^2} y(t)\, \mathrm{d}t + 1 + x^2.$$

Решение. Найдем последовательность итерированных ядер:

$$K_0(x,t) = K(x,t) = \frac{x}{1+t^2},$$
$$K_1(x,t) = \int_0^1 K(x,s)K(s,t)\, \mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{x}{1+s^2}\,\frac{s}{1+t^2}\, \mathrm{d}s = \frac{\ln 2}{2}\,\frac{x}{1+t^2},$$
$$K_2(x,t) = \int_0^1 K(x,s)K_1(s,t)\, \mathrm{d}s = \frac{\ln 2}{2}\int_0^1 \frac{x}{1+s^2}\,\frac{s}{1+t^2}\, \mathrm{d}s = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2 \frac{x}{1+t^2},$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$K_m(x,t) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^m \frac{x}{1+t^2}.$$

Находим резольвенту:

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_m(x,t) = \frac{x}{1+t^2} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^m = \frac{x}{1+t^2} \cdot \frac{2}{2-\lambda \ln 2}. \tag{11}$$

Радиус сходимости этого ряда $|\lambda| < 2/\ln 2 \approx 2,885$. Для данного уравнения

$$B^2 = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 |K(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{x^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{\pi+2}{24} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{B}\approx 2,161.$$

Таким образом, область сходимости ряда (9) для резольвенты оказалась шире, чем это диктуется условием (7). Решение уравнения находим из формулы (10):

$$y(x) = 1 + x^2 + \frac{2}{2-\lambda\ln 2}\int\limits_0^1 \frac{x}{1+t^2}\left(1+t^2\right)\,\mathrm{d}t = 1 + x^2 + \frac{4x}{2-\lambda\ln 2}. \tag{12}$$

Прямой подстановкой можно легко убедиться, что решение (12) удовлетворяет уравнению не только для значений λ, лежащих в области сходимости ряда, но и при любых значениях $\lambda \neq 2/\ln 2$.

Пользуясь методом итерированных ядер, найти резольвенту и указать область сходимости ряда (9). С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения при указанном значении λ и проверить его прямой подстановкой.

9. $y(x) = \lambda\int\limits_0^1 e^{x-t}y(t)\,\mathrm{d}t + e^x, \quad \lambda = 2.$

10. $y(x) = \lambda\int\limits_0^1 x\,e^{x-t}y(t)\,\mathrm{d}t + e^x, \quad \lambda = -2.$

11. $y(x) = \lambda\int\limits_0^1 xt\,y(t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{1-x^2}, \quad \lambda = 6.$

12. $y(x) = \lambda\int\limits_0^{\pi/2} x\sin t\,y(t)\,\mathrm{d}t + \sin x, \quad \lambda = 4.$

13. $y(x) = \lambda\int\limits_1^{e} \frac{\ln t}{x}y(t)\,\mathrm{d}t + \ln x, \quad \lambda = e.$

14. $y(x) = \lambda \int\limits_0^1 (xt - t)\, y(t)\, \mathrm{d}t + \sin \pi x, \quad \lambda = 3.$

Уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

Уравнение Фредгольма (2) с вырожденным ядром (5) может быть сведено к системе алгебраических уравнений. Для этого перепишем уравнение (2) в следующей форме:

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \int\limits_a^b q_k(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t + f(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k p_k(x) + f(x), \tag{13}$$

где числа

$$c_k = \int\limits_a^b q_k(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t. \tag{14}$$

Из выражения (13) видно, что решение $y(x)$ будет найдено как только будут определены все константы c_k. Подставим вместо функции $y(x)$ в интеграле (14) выражение (13):

$$\begin{aligned} c_k &= \int\limits_a^b q_k(t) \left(\lambda \sum_{i=1}^{n} c_i p_i(t) + f(t) \right) \mathrm{d}t = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \int\limits_a^b p_i(t)\, q_k(t)\, \mathrm{d}t + \int\limits_a^b q_k(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t \quad = \quad \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_{ki} + b_k, \end{aligned}$$

где константы

$$a_{ki} = \int\limits_a^b p_i(t)\, q_k(t)\, \mathrm{d}t, \qquad b_k = \int\limits_a^b q_k(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t. \tag{15}$$

Теперь, вместо интегрального уравнения, мы имеем эквивалентную ему систему линейных алгебраических уравнений

$$c_k - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ki} c_i = b_k \tag{16}$$

относительно неизвестных чисел c_k. Решив эту систему и подставив c_k в (13), получим решение исходного интегрального уравнения. Число решений интегрального уравнения с вырожденным ядром или его неразрешимость будут, таким образом, определяться свойствами алгебраической системы (16).

Пример 3. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \sin 2x + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \sin x \, \sin t + t \right) y(t) \, \mathrm{d}t.$$

Решение. Ядро данного интегрального уравнения вырожденное. Коэффициент λ примем равным 1. Обозначая

$$p_1(x) = \frac{1}{\pi} \sin x, \quad p_2(x) = 1, \quad q_1(t) = \sin t, \quad q_2(t) = t,$$

найдем коэффициенты уравнений (16) по формулам (15):

$$a_{11} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = 1, \qquad a_{12} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin t \, \mathrm{d}t = 0,$$

$$a_{21} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} t \, \sin t \, \mathrm{d}t = 2, \qquad a_{22} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} t \ \mathrm{d}t = 0,$$

$$b_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin t \, \sin 2t \, \mathrm{d}t = 0, \qquad b_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} t \, \sin 2t \, \mathrm{d}t = -\pi.$$

Система (16) примет вид

$$\begin{aligned} 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 &= 0 \\ -2c_1 + c_2 &= -\pi \end{aligned}$$

Общим решением этой системы будет $c_1 = C, \ c_2 = 2C - \pi$, где C — произвольная постоянная. Следовательно, решением заданного интегрального уравнения будет любая функция вида

$$y(x) = \sin 2x + C \cdot \frac{1}{\pi} \sin x + (2C - \pi) \cdot 1 = \sin 2x - \pi + C \left(\frac{1}{\pi} \sin x + 2 \right)$$

с произвольной константой C.

Решить или установить неразрешимость интегральных уравнений с вырожденным ядром.

15. $y(x) = \int\limits_0^{\pi} \operatorname{tg} x\, \cos t\, y(t)\, \mathrm{d}t + \cos x.$ **16.** $y(x) = \int\limits_0^{1} e^x t\, y(t)\, \mathrm{d}t + e^{-x}.$

17. $y(x) = \int\limits_0^{1} \sqrt{xt}\, y(t)\, \mathrm{d}t + 5x.$ **18.** $y(x) = 2\int\limits_0^{1} \frac{x}{t}\, y(t)\, \mathrm{d}t + 3\ln x.$

19. $y(x) = 2x - 1 - \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{1} (\cos \pi x - \sin \pi t) y(t)\, \mathrm{d}t.$

20. $y(x) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos(x - t)\, y(t)\, \mathrm{d}t + x.$ **21.** $y(x) = 2 - 3\int\limits_0^{\pi/2} \sin(x - 2t)\, y(t)\, \mathrm{d}t.$

22. $y(x) = \int\limits_0^{1} \left(e^x t + x e^t\right) y(t)\, \mathrm{d}t + e^x.$ **23.** $y(x) = x^2 - 2\int\limits_0^{1} (3xt - 1) y(t)\, \mathrm{d}t.$

24. $y(x) = \int\limits_0^{1} (3x + 2t) y(t)\, \mathrm{d}t + 8x^2 - 5x$

25. $y(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} (\sin(3x - t) + \sin x) y(t)\, \mathrm{d}t + 3\pi \cos 2x.$

26. $y(x) = 2\int\limits_0^{1} (\sin 2\pi(x - t) - 2) y(t)\, \mathrm{d}t + 5x.$

Собственные значения и собственные функции

Если ядро однородного интегрального уравнения Фредгольма (6) вырожденное, то задача о нахождении собственных чисел и собственных функций интегрального уравнения сводится к поиску собственных значений некоторой матрицы. Действительно, как следует из формул (13)–(16), всякое решение однородного уравнения имеет вид

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k p_k(x), \tag{17}$$

где числа c_k являются решениями однородной системы

$$c_k - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ki} c_i = 0.$$

Эта система может быть переписана в матричной форме

$$(I - \lambda A)\boldsymbol{C} = 0 \quad \text{или} \quad (A - \mu I)\boldsymbol{C} = 0, \qquad \lambda, \mu \neq 0, \tag{18}$$

где I — единичная матрица, $A = (a_{ij})$, $\boldsymbol{C}$ — столбец, состоящий из чисел c_i. Таким образом, собственные числа интегрального уравнения совпадают с отличными от нуля собственными числами матрицы A и могут быть найдены из уравнения

$$\det(A - \mu I) = 0 \tag{19}$$

Пример 4. Найти собственные числа и собственные функции интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^1 \left(xt - 2x^2\right) y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Решение. Ядро $K(x,t) = xt - 2x^2$ — вырожденное:

$$p_1(x) = x, \quad p_2(x) = -2x^2, \quad q_1(t) = t, \quad q_2(t) = 1.$$

Найдем компоненты матрицы A:

$$a_{11} = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}, \qquad a_{12} = -2\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2},$$
$$a_{21} = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \qquad a_{22} = -2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

Уравнение для нахождения собственных значений (19) примет вид:

$$\det(A - \mu I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \mu & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} - \mu \end{vmatrix} = \left(\mu + \frac{1}{6}\right)^2 = 0.$$

Следовательно, интегральное уравнение имеет только одно собственное значение $\mu = -1/6$ (характеристическое число $\lambda = -6$). Соответствующий ему собственный вектор находим решая систему (18):

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда находим $c_1 = c_2 = C$, где C — произвольная константа. Согласно формуле (17) собственной функцией интегрального уравнения будет

$$y(x) = -6\left(c_1 x - 2c_2 x^2\right) = Cx(1-2x).$$

Пример 5. Исследовать решения интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(x^2 \cos t - x \sin t\right) y(t)\,\mathrm{d}t + \cos x$$

в зависимости от значений параметра λ.

Решение. Поскольку ядро интегрального уравнения $K(x,t) = x^2 \cos t - x \sin t$ вырожденное, то его решение можно свести к решению алгебраической системы (16), которая может быть записана в матричной форме:

$$(I - \lambda A)\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}, \tag{20}$$

где $\boldsymbol{B}$ — столбец из коэффициентов b_i. Вычислим коэффициенты матрицы A и столбца $\boldsymbol{B}$:

$$p_1(x) = x^2, \quad p_2(x) = x, \quad q_1(t) = \cos t, \quad q_2(t) = \sin t,$$

$$a_{11} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos x x^2\,\mathrm{d}x = 4\pi, \qquad a_{12} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos x x\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$a_{21} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x x^2\,\mathrm{d}x = 0, \qquad a_{22} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x x\,\mathrm{d}x = -2\pi,$$

$$b_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \pi, \qquad b_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Система (20) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - 4\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1 + 2\pi\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\det(I - \lambda A) = (1 - 4\pi\lambda)(1 + 2\pi\lambda) = 0$, когда $\lambda = \dfrac{1}{4\pi}$ или $\lambda = -\dfrac{1}{2\pi}$.

При любых $\lambda \neq -\dfrac{1}{2\pi}, \dfrac{1}{4\pi}$ система имеет единственное решение

$$c_1 = \frac{\pi}{1 - 4\pi\lambda}, \qquad c_2 = 0.$$

В этом случае решением интегрального уравнения будет функция

$$y(x) = \cos x + \frac{\lambda\pi}{1 - 4\pi\lambda} x^2.$$

Если $\lambda = \dfrac{1}{4\pi}$, то система

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

решений не имеет. Следовательно, при данном значении λ не имеет решений и интегральное уравнение.

При $\lambda = -\dfrac{1}{2\pi}$ решением системы

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

будет $c_1 = \pi/3$, $c_2 = C$ и соответствующее решение интегрального уравнения:

$$y(x) = \cos x + \lambda(c_1 x^2 + c_2 x) = \cos x - x^2/6 + Cx.$$

Найти собственные значения и собственные функции следующих интегральных уравнений:

27. $y(x) = \lambda \displaystyle\int_0^1 (1 + 2x) y(t)\,\mathrm{d}t.$

28. $y(x) = \lambda \displaystyle\int_0^1 (1 - x^2)\, y(t)\,\mathrm{d}t.$

29. $y(x) = \lambda \displaystyle\int_0^\pi x \sin t\, y(t)\,\mathrm{d}t.$

30. $y(x) = \lambda \displaystyle\int_0^\pi \cos x \cos t\, y(t)\,\mathrm{d}t.$

31. $y(x) = \lambda \displaystyle\int_0^\pi \sin(x + t)\, y(t)\,\mathrm{d}t.$

32. $y(x) = \lambda \displaystyle\int_0^\pi \cos(x - t)\, y(t)\,\mathrm{d}t.$

33. $y(x) = \lambda \int\limits_0^1 (\cos 2\pi x + 2x \sin 2\pi t + t \sin \pi x)\, y(t)\, \mathrm{d}t.$

34. $y(x) = \lambda \int\limits_0^1 [\cos 2\pi(x - t) - 1]\, y(t)\, \mathrm{d}t.$

Исследовать решения интегральных уравнений при различных значениях параметра λ.

35. $y(x)=\lambda\int\limits_0^1(1 + 2x)y(t)\, \mathrm{d}t+1-\dfrac{3}{2}x.$

36. $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 x\, y(t)\, \mathrm{d}t+\sin 2\pi x.$

37. $y(x)=\lambda\int\limits_0^\pi \sin x \cos t\, y(t)\, \mathrm{d}t+\cos x.$

38. $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 x \sin 2\pi t\, y(t)\, \mathrm{d}t+x.$

39. $y(x)=\lambda\int\limits_{-1}^1(1 + xt)\, y(t)\, \mathrm{d}t+\sin \pi x.$

40. $y(x)=\lambda\int\limits_0^\pi \cos(x + t)\, y(t)\, \mathrm{d}t+1.$

Интегральные уравнения Вольтерра

Метод последовательных приближений

В отличие от уравнений Фредгольма, уравнения Вольтерра всегда имеют единственное решение. Поэтому оно может быть найдено методом последовательных приближений. Последовательность функций $y_n(x)$, строящаяся по правилу

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \lambda \int\limits_a^x K(x,t)\, y_0(t)\, \mathrm{d}t + f(x),\\
y_2(x) &= \lambda \int\limits_a^x K(x,t)\, y_1(t)\, \mathrm{d}t + f(x),\\
\dots & \quad \dots \quad \dots
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcl}
y_n(x) & = & \lambda \int\limits_a^x K(x,t)\, y_{n-1}(t)\, \mathrm{d}t + f(x), \\
\ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots
\end{array}
$$

всегда сходится к единственному решению интегрального уравнения при $n \to \infty$.

Пример 6. Решить интегральное уравнение

$$
y(x) = 1 - \int\limits_0^x (x-t) y(t)\, \mathrm{d}t
$$

методом последовательных приближений.

Решение. В качестве нулевого приближения выберем $y_0(x) = 1$. Тогда

$$
\begin{array}{rcl}
y_1(x) & = & 1 - \int\limits_0^x (x-t) \cdot 1 \cdot\, \mathrm{d}t = 1 - \dfrac{x^2}{2}, \\
y_2(x) & = & 1 - \int\limits_0^x (x-t) \left(1 - \dfrac{t^2}{2}\right)\, \mathrm{d}t = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!}.
\end{array}
$$

На n-ом шаге получим

$$
y_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!},
$$

откуда

$$
y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = \cos x.
$$

Решить уравнения Вольтерра методом последовательных приближений.

41. $y(x) = \int\limits_0^x y(t)\, \mathrm{d}t + x^2.$

42. $y(x) = \int\limits_0^x y(t)\, \mathrm{d}t + \dfrac{x^2}{2}.$

43. $y(x) = \int\limits_0^x (x-t) y(t)\, \mathrm{d}t + x.$

44. $y(x) = 1 - \int\limits_0^x \operatorname{tg} t\ y(t)\, \mathrm{d}t.$

45. $y(x) = 1 + \int\limits_0^x \frac{y(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t.$ **46.** $y(x) = 2\int\limits_0^x t\,y(t)\,\mathrm{d}t + x^2.$

47. $y(x) = 1 + \int\limits_0^x \frac{xy(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t.$ **48.** $y(x) = 1 + \int\limits_0^x \frac{t\,y(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t.$

Решение интегрального уравнения путем сведения его к дифференциальному уравнению

Если в интегральном уравнении (4) ядро $K(x,t)$ и свободный член $f(x,t)$ имеют непрерывные производные по переменной x, то это уравнение может быть продифференцировано один или несколько раз. Это позволяет в ряде случаев свести решение интегрального уравнения к задаче Коши для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения. Производная от интеграла при этом вычисляется по формуле

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_a^x K(x,t)y(t)\,\mathrm{d}t = K(x,x)y(x) + \int\limits_a^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}y(t)\,\mathrm{d}t. \tag{21}$$

Пример 7. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \sin x + \int\limits_0^x \sin(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t. \tag{22}$$

Решение. Дважды продифференцируем уравнение (22). Учитывая (21), получим

$$y'(x) = \cos x + \int\limits_0^x \cos(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t, \tag{23}$$

$$y''(x) = -\sin x + y(x) + \int\limits_0^x \sin(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t. \tag{24}$$

Исключая из уравнений (22) и (24) интеграл $\int\limits_0^x \sin(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение $y''=0$. Из уравнений (22) и (23) вытекают следующие начальные условия $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$. Решением полученной задачи Коши будет функция $y(x) = x$.

Пример 8. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = 2\operatorname{sh} x + 1 - \int_0^x (x-t)y(t)\,\mathrm{d}t. \tag{25}$$

Решение. Дважды дифференцируя уравнение (25), получим

$$y'(x) = 2\operatorname{ch} x - \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t, \tag{26}$$

$$y''(x) = 2\operatorname{sh} x - y(x). \tag{27}$$

Перепишем уравнение в стандартной форме

$$y'' + y = 2\operatorname{sh} x. \tag{28}$$

Начальные условия найдем из уравнений (25) и (26):

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \tag{29}$$

Решением уравнения (28) с учетом начальных условий (29) будет

$$y(x) = \cos x + \sin x + \operatorname{sh} x.$$

Решить уравнения Вольтерра, сведя их к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

49. $y(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{t+1} y(t)\,\mathrm{d}t + e^x.$

50. $y(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)y(t)\,\mathrm{d}t + 2\operatorname{sh} x.$

51. $y(x) = 4\displaystyle\int_0^x (t-x)y(t)\,\mathrm{d}t + 3\cos x.$

52. $y(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{4t-5x}{t^2} y(t)\,\mathrm{d}t + \ln x.$

53. $y(x) = \displaystyle\int_0^x \left[3(x-t) - (x-t)^2\right] y(t)\,\mathrm{d}t + e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1.$

54. $y(x)=\int\limits_1^x \frac{4x-3t}{t^2}y(t)\,\mathrm{d}t+4x\ln x-1.$ **55.** $y(x)=\int\limits_1^x \frac{x}{t^2}y(t)\,\mathrm{d}t+x^2.$

56. $y(x)=\int\limits_0^x \cos(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t+x.$ **57.** $y(x)=6\int\limits_0^x \cos 5(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t-4e^{5x}.$

58. $y(x)=2\int\limits_0^x \sin(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t+e^x.$ **59.** $y(x)+3\int\limits_0^x \sin(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t=2\operatorname{sh}x.$

60. $y(x)=3\int\limits_0^x \operatorname{ch}2(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t+5e^{-2x}.$

61. $y(x)+5\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t+3\cos x=0.$

62. $y(x)=\int\limits_0^x \left(2e^{x-t}+e^{3(x-t)}\right)y(t)\,\mathrm{d}t+20x-4.$

63. $y(x)=\int\limits_0^x \left(2e^{2(x-t)}-e^{3(x-t)}\right)y(t)\,\mathrm{d}t+5.$

64. $y(x)=\int\limits_0^x \frac{t+2}{(x+2)^2}y(t)\,\mathrm{d}t+2x.$ **65.** $y(x)+\int\limits_0^x \frac{(t-1)^2}{t^2+1}e^{x-t}y(t)\,\mathrm{d}t=1.$

66. $y(x)=\int\limits_1^x \frac{x(2t+1)}{t^2}y(t)\,\mathrm{d}t+x^3.$ **67.** $y(x)=\int\limits_0^x \frac{e^t}{e^x+1}y(t)\,\mathrm{d}t+e^{-x}.$

68. $y(x)=\int\limits_0^x \frac{t}{(x+1)(t+1)}y(t)\,\mathrm{d}t+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}.$

69. $y(x)=\int\limits_0^x (\operatorname{tg}t-1)e^{x-t}y(t)\,\mathrm{d}t+\cos x.$

Уравнения Вольтерра с вырожденным ядром

Если ядро интегрального уравнения (4) является вырожденным, то уравнение (4) может быть представлено в виде:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \int\limits_a^x q_k(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t + f(x). \tag{30}$$

Вводя функции

$$u_k(x) = \int\limits_a^x q_k(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t, \qquad k = 1, 2, .., n, \tag{31}$$

и подставляя их в уравнение (30), получим, что решение интегрального уравнения с вырожденным ядром имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x) u_k(x) + f(x). \tag{32}$$

Таким образом, чтобы найти $y(x)$, необходимо определить функции $u_k(x)$. Продифференцировав соотношения (31), и подставив вместо $y(x)$ выражение (32), получим систему дифференциальных уравнений 1-го порядка для неизвестных функций $u_k(x)$:

$$u_k'(x) = \sum_{i=1}^{n} q_k(x) p_i(x) u_i(x) + f(x) q_k(x), \qquad k = 1, 2, .., n.$$

Положив $x = a$ в соотношениях (31), найдем, что начальные условия являются однородными: $u_1(x) = u_2(x) = ... = u_n(x) = 0$. Подстановка решения системы дифференциальных уравнений в (32) даст решение исходного интегрального уравнения.

Пример 9. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} x} y(t)\, \mathrm{d}t + 1 \tag{33}$$

Решение. Обозначим

$$u(x) = \int\limits_0^x \operatorname{ch} t y(t)\, \mathrm{d}t. \tag{34}$$

Тогда уравнение (33) перепишется в виде

$$y(x) = \frac{u(x)}{\operatorname{ch} x} + 1. \tag{35}$$

Продифференцируем (34) и подставим вместо $y(x)$ выражение (35), получим

$$u'(x) = \operatorname{ch} x y(x) = \operatorname{ch} x \left(\frac{u(x)}{\operatorname{ch} x} + 1 \right) = u(x) + \operatorname{ch} x,$$

или в стандартной форме

$$u' - u = \operatorname{ch} x.$$

Решением этого уравнения с учетом начального условия $u(0) = 0$ будет функция

$$u(x) = \frac{1}{2} \left(xe^x + \operatorname{sh} x \right).$$

Подставляя ее в (35), получим решение интегрального уравнения:

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2} \frac{xe^x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Решить уравнения Вольтерра с вырожденным ядром.

70. $y(x) = \int\limits_1^x \frac{2t}{x^2} y(t)\, \mathrm{d}t + x^2.$

71. $y(x) = 2 \int\limits_0^x \frac{y(t)}{2t+1}\, \mathrm{d}t + 4x.$

72. $y(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin x}{\cos t} y(t)\, \mathrm{d}t + 1.$

73. $y(x) = \int\limits_1^x \frac{x \cos x}{t \cos t} y(t)\, \mathrm{d}t + \cos x e^x.$

74. $y(x) = \int\limits_\pi^x \frac{x^2}{t^3} y(t)\, \mathrm{d}t + x^3 \cos x$

75. $y(x) = \int\limits_e^x \frac{2}{t \ln x} y(t)\, \mathrm{d}t + 1.$

76. $y(x) + \int\limits_0^x \cos x e^{x-t} y(t)\, \mathrm{d}t = e^{x - \sin x}.$

77. $y(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos t}{\sin x} y(t)\, \mathrm{d}t - \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}.$

78. $y(x) = \int\limits_{\pi/4}^x \frac{y(t)}{\cos x \sin t}\, \mathrm{d}t + 1.$

79. $y(x) = \int\limits_0^x \frac{1-t^2}{1-x^4} y(t)\, \mathrm{d}t + \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1-x^2}.$

80. $y(x) = 2\int\limits_0^x \frac{1+t^2}{1-x^4} y(t)\,\mathrm{d}t + \frac{(1-3x)(1+x)}{1+x^2}.$

81. $y(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \sqrt{\frac{1+x}{1-t^2}}\, y(t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{1-x^2}.$

Уравнения Вольтерра с разностным ядром

Если ядро интегрального уравнения (3)или (4) зависит только от разности своих аргументов: $K(x,t) = K(x-t)$, то такое уравнение может быть решено операторным методом. Согласно этому методу, каждой функции $f(x)$ (которая называется *оригиналом*) взаимно однозначно ставится в соответствие функция $\mathbb{F}(p)$ (которая называется *изображением*) по следующему правилу:

$$\mathbb{F}(p) = \int\limits_0^\infty f(x)e^{-px}\,\mathrm{d}x.$$

Это правило называется преобразованием Лапласа. Ключевым свойством преобразования Лапласа, которое используется для решения интегральных уравнений, является теорема о свертке, согласно которой, если $\mathbb{F}(p)$ и $\mathbb{G}(p)$ — изображения функций $f(x)$ и $g(x)$, то произведению изображений $\mathbb{F}(p)\mathbb{G}(p)$ соответствует функция, которая является сверткой функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$f(x) * g(x) = \int\limits_0^x f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Пусть $\mathbb{Y}(p), \mathbb{F}(p)$ и $\mathbb{K}(p)$ — изображения функций $y(x), f(x)$ и $K(x)$ соответственно. Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и теоремой о свертке, преобразуем исходное интегральное уравнение

$$y(x) = \int\limits_0^x K(x-t)\,y(t)\,\mathrm{d}t + f(x) \tag{36}$$

(которое также называют уравнением типа свертки) в алгебраическое уравнение относительно изображений:

$$\mathbb{Y}(p) = \mathbb{K}(p)\mathbb{Y}(p) + \mathbb{F}(p),$$

откуда находим

$$\mathbb{Y}(p) = \frac{\mathbb{F}(p)}{1 - \mathbb{K}(p)}.$$

По полученному изображению $\mathbb{Y}(p)$ восстанавливаем искомую функцию $y(x)$.

Для осуществления перехода от функций-оригиналов к их изображениям и обратно удобно использовать таблицу соответствия:

$f(x)$	1	x^n	e^{ax}	$x^n e^{ax}$	$\operatorname{sh} ax$
$\mathbb{F}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{1}{p-a}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$f(x)$	$\operatorname{ch} ax$	$\sin ax$	$\cos ax$	$e^{ax}\sin bx$	$e^{ax}\cos bx$
$\mathbb{F}(p)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\frac{a}{(p-a)^2+b^2}$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$

Более полный набор функций можно найти, например в [2, 5].

Пример 10. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \operatorname{sh} x - 2\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t \tag{37}$$

Решение. В этом уравнении $f(x) = \operatorname{sh} x$, а $K(x) = -2\operatorname{ch} x$. Изображениями этих функций являются $\mathbb{F}(p) = 1/(p^2-1)$ и $\mathbb{K}(p) = -2p/(p^2-1)$ соответственно. Используя теорему о свертке, преобразуем уравнение (37). В пространстве изображений оно примет вид:

$$\mathbb{Y}(p) = \frac{1}{p^2-1} - \frac{2p}{p^2-1}\mathbb{Y}(p),$$

откуда находим

$$\mathbb{Y}(p) = \frac{1}{p^2-2p-1} = \frac{1}{(p-1)^2-2}. \tag{38}$$

По таблице находим, что изображению (38) соответствует функция-оригинал

$$y(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\sqrt{2}x,$$

которая является решением уравнения (37).

С помощью преобразования Лапласа решить интегральные уравнения типа свертки.

82. $y(x)=\dfrac{1}{6}\displaystyle\int\limits_0^x (x-t)^3 y(t)\,\mathrm{d}t + x.$

83. $y(x)=\displaystyle\int\limits_0^x e^{x-t} y(t)\,\mathrm{d}t + e^{2x} - 2.$

84. $\displaystyle\int\limits_0^x \cos(x-t) y(t) dt = \sin x - 2x.$

85. $\displaystyle\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t) y(t)\,\mathrm{d}t = 3x^2.$

86. $\displaystyle\int\limits_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = x^3 e^x.$

87. $\displaystyle\int\limits_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = e^{2x}\sin x.$

88. $y(x)=\displaystyle\int\limits_0^x \sin(x-t) y(t)\,\mathrm{d}t + x^2.$

89. $y(x)=2\displaystyle\int\limits_0^x \cos(x-t) y(t)\,\mathrm{d}t + e^x.$

90. $y(x) = 3\displaystyle\int\limits_0^x \sin 4(x-t) y(t)\,\mathrm{d}t + \sin x.$

91. $y(x) = 8\displaystyle\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t)\,\mathrm{d}t + \operatorname{ch} x.$

92. $y(x)=5\displaystyle\int\limits_0^x \sin(x-t) y(t)\,\mathrm{d}t + 4.$

93. $y(x) = \displaystyle\int\limits_0^x e^{x-t} y(t)\,\mathrm{d}t + \operatorname{sh} x.$

94. $y(x) = \operatorname{ch} x - 5\displaystyle\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t)\,\mathrm{d}t + 4.$

95. $y(x) = 2\displaystyle\int\limits_0^x \cos 3(x-t) y(t)\,\mathrm{d}t + \cos 3x.$

96. $y(x) = 2\displaystyle\int\limits_0^x y(t)\,\mathrm{d}t - \displaystyle\int\limits_0^x e^{x-t} y(t)\,\mathrm{d}t + x.$

97. $y(x) = \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t + 2\int\limits_0^x \sin(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t + \operatorname{ch} x.$

Интегро-дифференциальные уравнения с разностным ядром

Интегро-дифференциальным называется уравнение, которое содержит неизвестную функцию как под знаком интеграла, так и под знаком производной, при этом производные могут входить в подынтегральное выражение. Интегро-дифференциальные уравнения с разностным ядром Вольтерровского типа могут быть решены операторным методом. Схема применения преобразований Лапласа остается такой же, как и для интегральных уравнений. При этом, если функция $y(x)$ имеет изображение $\mathbb{Y}(p)$, то изображения для ее производных вычисляются по правилу

$$\begin{aligned}
&y'(x) \risingdotseq p\mathbb{Y}(p) - y(0),\\
&y''(x) \risingdotseq p^2\mathbb{Y}(p) - py(0) - y'(0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y^{(n)}(x) \risingdotseq p^n\mathbb{Y}(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y'(0) - \ldots - py^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

Таким образом, для получения однозначного решения интегро-дифференциальные уравнения, в отличие от интегральных, должны быть дополнены начальными условиями.

Пример 11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$y'(x) = \int\limits_0^x (x-t)y(t)\,\mathrm{d}t - 1, \quad y(0) = 1 \tag{39}$$

Решение. В пространстве изображений уравнение (39) имеет вид

$$p\mathbb{Y}(p) - 1 = \frac{1}{p^2}\mathbb{Y}(p) - \frac{1}{p}.$$

Найдем отсюда

$$\mathbb{Y}(p) = \frac{p}{p^2+p+1}.$$

Преобразуем полученное выражение

$$\mathbb{Y}(p) = \frac{p+1/2}{(p+1/2)^2+3/4} - \frac{1/2}{(p+1/2)^2+3/4},$$

после чего с помощью таблицы на стр. 23 восстанавливаем решение уравнения:

$$y(x) = e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Решить интегро-дифференциальные уравнения с помощью преобразования Лапласа.

98. $y'(x) = \int\limits_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,\mathrm{d}t + x, \qquad y(0) = 1.$

99. $y'(x) + \int\limits_0^x e^{-2(x-t)}y(t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad y(0) = 1.$

100. $y''(x) + \int\limits_0^x e^{2(x-t)}y'(t)\,\mathrm{d}t = e^{2x}, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

101. $y'(x) - y(x) + \int\limits_0^x (x-t)y'(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = x, \qquad y(0) = -1.$

102. $y''(x) + 2y'(x) + y(x) =$

$$= \int\limits_0^x (x-t)y''(t)\,\mathrm{d}t + 2\int\limits_0^x \sin(x-t)y'(t)\,\mathrm{d}t + \cos x,$$

$$y(x) = y'(x) = 0.$$

103. $y''(x) + y(x) + \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)y'(t)\,\mathrm{d}t = \operatorname{ch} x,$

$$y(x) = y'(x) = 0.$$

Ответы

1. $y(x) = 2e^x$. **2.** $y(x) = e^x(1+2x)$. **3.** $y(x) = \sqrt{1-x^2} + \dfrac{x}{2}$. **4.** $y(x) = \sin x + \dfrac{\pi x}{4}$. **5.** $y(x) = \dfrac{2e-4}{x} + \ln x$. **6.** $y(x) = x + \dfrac{4}{5}\sqrt{x}$. **7.** $y(x) = x^{3/2} + \dfrac{x^{1/2}}{1-\ln 2}$. **8.** $y(x) = \cos x - \dfrac{2}{\pi}\sin x$. **9.** $y(x) = -e^x$. **10.** $y(x) = e^x(1-x)$. **11.** $y(x) = \sqrt{1-x^2} + 2x$. **12.** $y(x) = \sin x - \dfrac{\pi x}{3}$. **13.** $y(x) = \ln x - \dfrac{2e}{x}$. **14.** $y(x) = \sin \pi x + \dfrac{2x}{\pi}$. **15.** $y(x) = \cos x - \dfrac{\pi}{2}\operatorname{tg} x$. **16.** Нет решения. **17.** $y(x) = 5x + 4\sqrt{x}$. **18.** $y(x) = 3\ln x - 2x$. **19.** $y(x) = C\cos x + 2x - 1 - \dfrac{2C}{\pi}$. **20.** $y(x) = x - 2\cos x$. **21.** $y(x) = 2 - 3\sin x$. **22.** $y(x) = -3x$. **23.** Нет решения. **24.** $y(x) = 4x(2-x)$. **25.** $y(x) = 3\pi\cos 2x - \pi C\cos 3x + 4C + 4$. **26.** $y(x) = \dfrac{5}{2\pi}(\cos 2\pi x + \sin 2\pi x) + 5x - 4$. **27.** $\lambda = \dfrac{6}{7}$, $y(x) = C(1+2x)$. **28.** $\lambda = \dfrac{3}{2}$, $y(x) = C(1-x^2)$. **29.** $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$, $y(x) = Cx$. **30.** $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$, $y(x) = C\cos x$. **31.** $\lambda_{1,2} = \pm\dfrac{2}{\pi}$, $y_{1,2}(x) = C(\sin x \pm \cos x)$. **32.** $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$, $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$. **33.** $\lambda_1 = -\pi$, $y_1(x) = \dfrac{\pi^2 C}{3}(\cos 2\pi x - \sin \pi x) - 2\pi C x$; $\lambda_2 = \pi$, $y_2(x) = \pi C(2\cos 2\pi x + \sin \pi x)$. **34.** $\lambda_1 = -1$, $y_1(x) = C$; $\lambda_{2,3} = 2$, $y_2(x) = C_1\cos 2\pi x + C_2\sin 2\pi x$. **35.** $\lambda \neq \dfrac{6}{7}$, $y(x) = 1 - \dfrac{3}{2}x$; $\lambda = \dfrac{6}{7}$, $y(x) = 1 - \dfrac{3}{2}x + C(1+2x)$. **36.** $\lambda \neq 2$, $y(x) = \sin 2\pi x$; $\lambda = 2$, $y(x) = \sin 2\pi x + Cx$. **37.** $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $y(x) = \cos x + \dfrac{\pi\lambda}{2}\sin x$. **38.** $\lambda \neq -2\pi$, $y(x) = \dfrac{2\pi x}{2\pi + \lambda}$; $\lambda = -2\pi$, нет решений. **39.** $\lambda \neq \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}$, $y(x) = \sin \pi x + \dfrac{2\lambda x/\pi}{1 - 2\lambda/3}$; $\lambda = \dfrac{1}{2}$, $y(x) = \sin \pi x + \dfrac{3}{2\pi}x + C$; $\lambda = \dfrac{1}{2}$, нет решений. **40.** $\lambda \neq \pm\dfrac{2}{\pi}$, $y(x) = 1 - \dfrac{4\lambda}{2 + \lambda\pi}\sin x$; $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$, $y(x) = 1 - \sin x + C\cos x$; $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$, нет решений. **41.** $y(x) = 2\left(e^x - x - 1\right)$. **42.** $y(x) = e^x - x - 1$. **43.** $y(x) = \operatorname{sh} x$. **44.** $y(x) = \cos x$. **45.** $y(x) = \dfrac{1}{1-\ln 2}$. **46.** $y(x) = e^{x^2} - 1$. **47.** $y(x) = \dfrac{4}{4-\pi}$. **48.** $y(x) = \dfrac{1}{1-\ln\sqrt{2}}$. **49.** $y(x) = e^x\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$. **50.** $y(x) = x\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$. **51.** $y(x) = 4\cos 2x - \cos x$. **53.** $y(x) = 4\operatorname{sh} 2x$. **52.** $y(x) = \cos 2\ln x + \sin 2\ln x - 1$. **54.** $y(x) = x^3 - x - \dfrac{1}{x}$. **55.** $y(x) = x^2(\ln x + 1)$. **56.** $y(x) = 2e^x(x-1) + x + 2$. **57.** $y(x) = 10e^{5x} - e^{3x}(14\cos 4x + 13\sin 4x)$. **58.**

$y(x) = \operatorname{ch} x + xe^x$. **59.** $y(x) = 2\operatorname{sh} x$. **60.** $y(x) = 3e^{-x} + 2e^{4x}$. **61.** $y(x) = 2\cos x - 5\cos 2x$. **62.** $y(x) = e^{2x} + 6x - 5$. **63.** $y(x) = e^{3x}(2\cos x - \sin x) + 3$. **64.** $y(x) = \dfrac{3x^2+4x}{x+2}$. *Указание.* Перед дифференцированием выполнить замену функции $z = (x+2)^2 y$. **65.** $y(x) = (x^2+1)(1 - \operatorname{arctg} x)$. **66.** $y(x) = x^2\left(2e^{2x-2} - 1\right)$. *Указание.* Перед дифференцированием выполнить замену функции $y = zx$. **67.** $y(x) = e^{-x} + \ln\dfrac{2}{1+e^{-x}}$. *Указание.* Умножить уравнение на $x+1$ и продифференцировать **68.** $y(x) = 1 - e^{\frac{x}{x+1}}$. *Указание.* Умножить уравнение на $e^x + 1$ и продифференцировать **69.** $y(x) = \cos x - \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{x}{\cos x}$. **70.** $y(x) = 2x^2 - 1$. **71.** $y(x) = (4x+2)\ln(2x+1) + 4x$. **72.** $y(x) = \sin^2 x + 1$. **73.** $y(x) = (x\ln x + 1)\cos x e^x$. **74.** $y(x) = x^3(\sin x + \cos x)$. **75.** $y(x) = 2\ln x - 1$. **76.** $y(x) = (1 - x\cos x)e^{x - \sin x}$. **77.** $y(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2} - \dfrac{2}{\pi}$. **78.** $y(x) = \dfrac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\cos^2 x} + 1$. **79.** $y(x) = \dfrac{x^2+x+1}{1-x^4}e^{\operatorname{arctg} x}$. **80.** $y(x) = \dfrac{1-3x^2}{1+x^2}$. **81.** $y(x) = \sqrt{1+x}$. **82.** $y(x) = \dfrac{1}{2}(\sin x + \operatorname{sh} x)$. **83.** $y(x) = xe^{2x} + 1$. **84.** $y(x) = 1 - x^2$. **85.** $y(x) = 6x - x^3$. **86.** $y(x) = (2+x)x^2e^x$. **87.** $y(x) = e^{2x}(\cos x + 2\sin x)$. **88.** $y(x) = x^2 + \dfrac{x^4}{12}$. **89.** $y(x) = \dfrac{e^x}{2}(x^2+4x+2)$. **90.** $y(x) = 5\sin x - 2\sin x$. **91.** $y(x) = \operatorname{ch} 3x$. **92.** $y(x) = 5\operatorname{ch} 2x - 1$. **93.** $y(x) = \dfrac{1}{3}(e^x - e^{-2x})$. **94.** $y(x) = \cos 2x$. **95.** $y(x) = e^x\left(\cos 2\sqrt{2}x + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2\sqrt{2}x\right)$. **96.** $y(x) = \dfrac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) - \dfrac{1}{2}$. **97.** $y(x) = \dfrac{1}{3}(4\operatorname{ch}\sqrt{3}x - 1)$. **98.** $y(x) = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{24}$. **99.** $y(x) = e^{-x}(1+x)$. **100.** $y(x) = e^x - 1$. **101.** $y(x) = -e^x$. **102.** $y(x) = 1 - (1+x)e^{-x}$. **103.** $y(x) = 1 - \cos x$.

Список литературы

[1] А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов. Интегральные уравнения. М.: изд. МГУ, 1989.

[2] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

[3] В. А. Сочнева. Методы математической физики. Часть II. Казань, изд. КГУ, 1978.

[4] И. Г. Петровский. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: изд. МГУ, 1984.

[5] Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.

[6] Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы. Под ред. А. В. Ефимова. М.: Наука, 1984.

Содержание